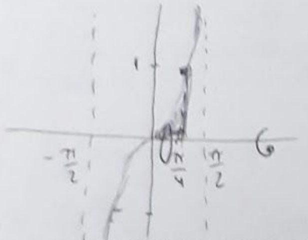
4. (1Punto) La región entre la gráfica $y = \tan x$ y el eje X entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$ gira alrededor del eje X. Calcule el volumen del sólido resultante.

rebanadas

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} (\tan x)^2\, dx = \pi \int_0^{\pi/4} \underbrace{(\sec^2 x - 1)}_{\text{identidad trig.}}\, dx$$



$$V = \pi (\tan x - x)\Big|_0^{\pi/4} = \pi\left(\tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - \pi(\tan 0 - 0)$$

$$V = \pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \cancel{\pi(0-0)}^{\to 0}$$

$$\boxed{V = \left(\pi - \frac{\pi^2}{4}\right) u.a.^3}$$

2. (1punto c/u) Resuelva las integrales A-F (Se pueden saltar pasos en el procedimiento).

$$A = \int \left(\frac{5}{3}\sin\left(\frac{7}{6}x + 3\right) + \frac{3}{2}\cos(-6x+1) + \csc^2\left(\frac{3}{4}x+1\right) - 6\sec(2x)\tan(2x) - 6\tan(3x-1) \right) dx$$

$$A = \left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{5}{3}\right)\left(-\cos\left(\frac{7}{6}x+3\right)\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(\operatorname{sen}(-6x+1)) + \frac{4}{3}\left(-\cot\left(\frac{3}{4}x+1\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\right)(6)(\sec 2x) - \left(\frac{1}{3}\right)(6)\ln|\sec(3x-1)|$$

$$\boxed{A = -\frac{10}{7}\cos\left(\frac{7}{6}x+3\right) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(-6x+1) - \frac{4}{3}\cot\left(\frac{3}{4}x+1\right) - 3\sec 2x - 2\ln|\sec(3x-1)| + C}$$

$$B = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{d}{dx}(x\sin^2 x)\, dx = x\operatorname{sen}^2 x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\pi}{6}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$B = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{24} = \boxed{\frac{\pi}{12} = B}$$

$$C = \int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\sec^2 u}{\sqrt{x}}\, 2\sqrt{x}\, du = 2\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \sec^2 u\, du = 2\tan\sqrt{x}\Big|_{\pi^2/16}^{\pi^2/9}$$

$u = \sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

$$C = 2\tan\frac{\pi}{3} - 2\tan\frac{\pi}{4} = 2(\sqrt{3}) - 2(1) = \boxed{2\sqrt{3} - 2 = C}$$

$$D = \int \frac{\sec(1/x)}{x^2}\, dx = \int \frac{\sec m}{x^2}(-x^2)\, dm = -\int \sec m\, dm = -\ln\left|\sec\frac{1}{x} + \tan\frac{1}{x}\right| + c$$

$m = \frac{1}{x}$

$dm = -\frac{1}{x^2}\, dx$

$$\boxed{D = -\ln\left|\sec\frac{1}{x} + \tan\frac{1}{x}\right| + cte}$$

$$E = \int_{3\pi/4}^{\pi} \sin(2N)\cos^3(2N)\, dN = \int_{3\pi/4}^{\pi} \operatorname{sen} 2N\, R^3 \left(\frac{-1}{2\operatorname{sen}(2N)}\right) dR = -\frac{1}{2}\int_a^b R^3\, dR$$

$R = \cos(2N)$

$dR = -2\operatorname{sen}(2N)\, dN$

$$E = -\frac{1}{2}\frac{(\cos(2N))^4}{4}\Big|_{3\pi/4}^{\pi} = -\frac{1}{8}\left[\cos^{1} 2\pi - \cos^{0}\frac{3\pi}{2}\right] = \boxed{-\frac{1}{8} = E}$$

$$F = \int_{7\pi/6}^{4\pi/3} \tan x \sec^2 x\, dx = \int_{7\pi/6}^{4\pi/3} u\, du = \frac{u^2}{2}\Big|_{7\pi/6}^{4\pi/3} = \frac{1}{2}\tan^2 x\Big|_{7\pi/6}^{4\pi/3} = \frac{1}{2}\left(\tan\frac{4\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)^2$$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x\, dx$

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \frac{\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}}{\cos\frac{4\pi}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad \therefore F = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\tan\frac{7\pi}{6} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{F = \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}}$$

UASLP, IICO. ING. FISICA. CALCULO II. **Examen Unidad 4.** "Func. Trascendentes CAP 8". 12-04-2019

Nombre: PROFESOR . Calificación: _______ puntos de 10 posibles

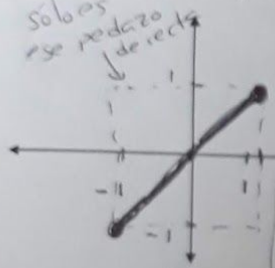
INSTRUCCIONES: Utilice una NOTACIÓN MATEMÁTICA VÁLIDA y CLARA para resolver cada ejercicio en el espacio correspondiente. Utilice lápiz para escribir el procedimiento de cada ejercicio. JUSTIFICAR CADA RESPUESTA y subráyela ó enciérrela para que se le pueda asignar una calificación. PROHIBIDO EL USO DE CALCULADORA y/o CELULAR.

1. (0.5 pts c/u) En A) y B) Grafique CLARAMENTE **f(x)** indicando su dominio y rango. Utilice las gráficas y lo visto en clase para determinar el valor para el "X" dado:

A) $f(x) = \cos(\cos^{-1}(x))$

Encontrar f(x) en $x = \frac{1}{2}$ y en $x = 2$

sólo es ese pedazo de recta

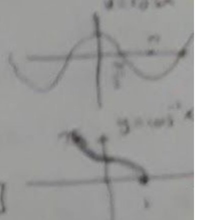


D $[-1,1]$
E $[-1,1]$

$\boxed{f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} \quad f(2) = \text{indeterm.}}$

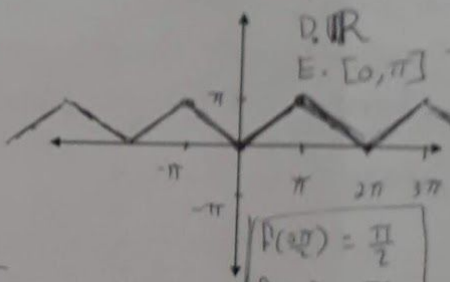
B) $f(x) = \cos^{-1}(\cos x)$

Encontrar f(x) en $x = \frac{3\pi}{2}$ y en $x = \frac{\pi}{2}$



$y = \cos x$, $y = \cos^{-1} x$

es importante conocer D. y E. de $\cos x$ y $\cos^{-1} x$



D. $\mathbb{R}$
E. $[0, \pi]$

$\boxed{f(\tfrac{3\pi}{2}) = \tfrac{\pi}{2} \quad f(\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{\pi}{2}}$

2. (1Punto) Demuestre que $\frac{d}{dx}\sec^{-1} u = \frac{u'(x)}{u\sqrt{u^2-1}}$

$y = \sec^{-1} u$

$\frac{d}{dx}(\sec y = u)$

$\sec y \tan y \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{u'(x)}{\sec y \tan y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{u'(x)}{\sec(\sec^{-1} u)\tan(\sec^{-1} u)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{u'(x)}{u\sqrt{\sec^2(\sec^{-1} u) - 1}}$

$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sec^{-1} u = \frac{u'(x)}{u\sqrt{u^2-1}}}$ L.Q.Q.D

3. (1Punto) Demostrar que $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Nota: Empiece con el hecho de que $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y obtenga la función inversa, la cual sería "$\sinh^{-1} x$".

$2y = e^x - e^{-x}$

$2y = e^x - \frac{1}{e^x}$

$(2y)e^x = (e^x)^2 - 1$

$(e^x)^2 - (2y)e^x - 1 = 0$

si $B = e^x$

$B^2 - (2y)B - 1 = 0$

Formula gral.

$B = \frac{-(-2y) \pm \sqrt{(-2y)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$

$B = e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2}$

$x = \ln\left(\frac{2y \pm 2\sqrt{y^2+1}}{2}\right)$

$x \leftrightarrow y$

$\boxed{y = \ln(x \pm \sqrt{x^2+1}) = \operatorname{senh}^{-1} x}$ L.Q.Q.D

* se quedan con el "+", con el "−" quedan $\ln$'s negativos.

3. (1 punto) Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \log_2 \sqrt{x} + \sqrt{\log_2 x} + 2^{\sqrt{x}} + \sqrt{2^x}$

$f'(x) = \frac{1}{\ln 2 \sqrt{x}} \frac{d}{dx}\sqrt{x} + \frac{1}{2}(\log_2 x)^{-1/2} \frac{d}{dx}\log_2 x + (\ln 2) 2^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx}\sqrt{x} + \frac{1}{2}(2^x)^{-1/2} \frac{d}{dx} 2^x$

$f'(x) = \frac{1}{(2\ln 2) x} + \frac{1}{(2\ln 2) x \sqrt{\log_2 x}} + \frac{(\ln 2) 2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + \frac{(\ln 2) 2^x}{2\sqrt{2^x}}$

4. (1 punto) Encuentre y' si $\frac{d}{dx}\left[\ln(x+y) + x^2 - 2y^3 = 1\right]$

$\frac{1}{x+y}(1 + y'(x)) + 2x - 6y^2 y'(x) = 0$

$y'(x)\left(\frac{1}{x+y} - 6y^2\right) + \frac{1}{x+y} + 2x = 0$

$y'(x) = \frac{-2x - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x+y} - 6y^2}$

$y'(x) = \frac{-2x^2 - 2xy - 1}{1 - 6xy^2 - 6y^3}$

5. (1 punto) Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = (x^2+1)^{(x^2+1)}$ (Incluya el procedimiento)

$y = U^U \quad \therefore \frac{d}{dx}\left[\ln y = U \ln U\right]$ deriv. implícita

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = U \frac{d}{dx}\ln U + \ln U \frac{dU}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \left(U\left(\frac{1}{U}\right)U'(x) + (\ln U) U'(x)\right) y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} U^U = (1 + \ln U) U^U \frac{dU}{dx}$ $\quad U = x^2+1$ $\quad \frac{dU}{dx} = 2x$

$\frac{d}{dx}(x^2+1)^{x^2+1} = (1 + \ln(x^2+1))(x^2+1)^{x^2+1}(2x)$

6. (1 punto) Use derivación logarítmica para encontrar $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt[3]{\frac{(3x^2+3)^2(3x-4)^4}{\sqrt{x}}} = y$

$y = \frac{(3x^2+3)^{2/3}(3x-4)^{4/3}}{x^{1/6}}$

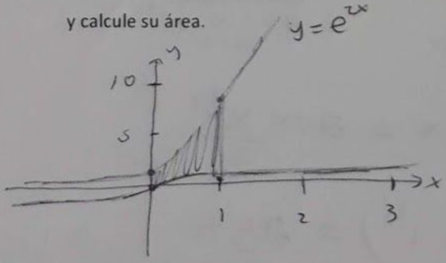
Primero $\ln y = \frac{2}{3}\ln(3x^2+3) + \frac{4}{3}\ln(3x-4) - \frac{1}{6}\ln x$

deriv. impl.

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\left(\frac{6x}{3x^2+3}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{3x-4}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{4x}{3x^2+3} + \frac{4}{3x-4} - \frac{1}{6x}\right)\sqrt[3]{\frac{(3x^2+3)^2(3x-4)^4}{\sqrt{x}}}$

7. (1 punto) Grafique CLARAMENTE la región acotada por las gráficas $y = e^{2x}$, $y = \frac{x}{x^2+1}$, $x = 0$ y $x = 1$ y calcule su área.



$A = \int_0^1 \left(e^{2x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 e^{2x}dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$

$m = 2x \quad dm = 2dx \qquad N = x^2+1 \quad dN = 2x\,dx$

$A = \int_{x=0}^{1} \frac{1}{2}e^m dm - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{N}dN$

$A = \left(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right)\Big|_0^1$

$A = \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\ln 2\right) - \left(\frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}\ln(1)\right) = \frac{1}{2}(e^2 + \ln 2 - 1)$

u.a.

UASLP, IICO. ING. FISICA. CALCULO II. **Examen Unidad 3**. "Func. Exp. y Log. CAP 7". 11-04-2019.

Nombre: PROFESOR . Calificación: _______ puntos de 10 posibles.

INSTRUCCIONES: Utilice una NOTACIÓN MATEMÁTICA VÁLIDA y CLARA para resolver cada ejercicio en el espacio correspondiente. Utilice lápiz para escribir el procedimiento de cada ejercicio. JUSTIFICAR CADA RESPUESTA y subráyela o enciérrela para que se le pueda asignar una calificación. PROHIBIDO EL USO DE CALCULADORA y/o CELULAR.

1. (1 punto c/u) Realice las integrales A, B, C y D.

$$A = \int_0^1 5^x e^x \, dx = \int_0^1 (5e)^x dx = \left.\frac{(5e)^x}{\ln(5e)}\right|_0^1 = \frac{(5e)^1}{\ln(5e)} - \frac{(5e)^0}{\ln(5e)} = \frac{5e-1}{\ln 5+1}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad \frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

$$B = \int \frac{(2+\log_7 R)^3}{R} dR = \ln 7 \int m^3 \, dm = \frac{\ln 7}{4}(2+\log_7 R)^4 + c \qquad \frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{(\ln a)x}$$

$m = 2+\log_7 R$

$dm = \left[1/(\ln 7)(R)\right] dR$

$$C = \int_0^1 2^{-3m+2}\, dm = -\frac{1}{3}\int_{m=0}^{m=1} 2^x dx = -\frac{1}{3}\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_{m=0}^{m=1} = -\frac{1}{3\ln 2}\left.2^{-3m+2}\right|_0^1 =$$

$x = -3m+2$

$dx = -3\,dm$

$$C = -\frac{1}{3\ln 2}\left[2^{-1} - 2^{2}\right] = -\frac{1}{3\ln 2}\left[\frac{1}{2} - 4\right] = \frac{7}{6\ln 2}$$

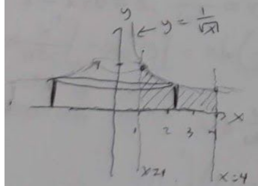
$$D = \int_{-1}^{0} \frac{2x^2}{-3x^3+5}\, dx = -\frac{2}{9}\int_{x=-1}^{x=0} \frac{1}{P}\, dP = -\frac{2}{9}\ln|P|\Big|_{x=-1}^{x=0} = -\frac{2}{9}\ln|-3x^3+5|\Big|_{-1}^{0}$$

$P = -3x^3+5$

$dP = -9x^2 dx$

$$D = \left(-\frac{2}{9}\ln|5|\right) - \left(-\frac{2}{9}\ln|8|\right) = \frac{2}{9}(\ln 8 - \ln 5) = \frac{2}{9}\ln\frac{8}{5}$$

2. (1 Punto) La región acotada por la gráfica $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ gira alrededor del **eje Y**. Grafique claramente la región y calcule el volumen del sólido resultante.



cascarones

$$V = 2\pi \int_1^4 x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$V = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\, dx = 2\pi \left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_1^4$$

$$V = \frac{4\pi}{3}\left(4^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{28\pi}{3}\ u.a^3$$